26 三角比と三角形

221

(1)

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 5\sqrt{3}$$

(2)

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$$
$$= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot (AB + AC)\cdot AD\cdot \sin 30^\circ$$
$$= \frac{9}{4}AD$$

(1)より，$\triangle ABC = 5\sqrt{3}$ だから，$\frac{9}{4}AD = 5\sqrt{3}$　$\therefore AD = \frac{20\sqrt{3}}{9}$

(3)

余弦定理より，

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos 60^\circ$$
$$= 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{1}{2}$$
$$= 21$$

$\therefore BC = \sqrt{21}$　・・・①

△ABC において，AD は∠A の 2 等分線だから，

BD：DC＝AB：AC＝4：5 より，$BD = \frac{4}{9}BC$　・・・②

よって，①，②より，$BD = \frac{4\sqrt{21}}{9}$

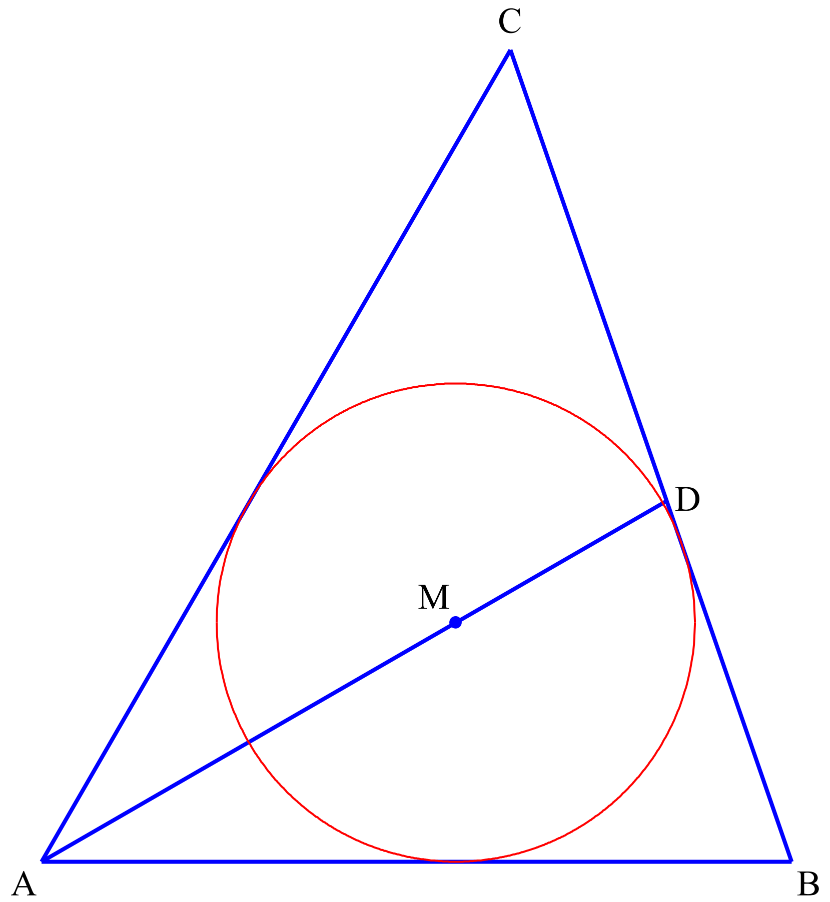
△ABD において，BM は∠B の 2 等分線だから，

AM：MD＝BA：BD より，$MD = \frac{BD}{BA + BD}\cdot AD$

これと，$BA = 4$，$BD = \frac{4\sqrt{21}}{9}$，$AD = \frac{20\sqrt{3}}{9}$ より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MD} &= \frac{\dfrac{4\sqrt{21}}{9}}{4+\dfrac{4\sqrt{21}}{9}} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{\sqrt{21}}{9+\sqrt{21}} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{\sqrt{21}\left(9-\sqrt{21}\right)}{\left(9+\sqrt{21}\right)\left(9-\sqrt{21}\right)} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{\sqrt{21}\left(9-\sqrt{21}\right)}{60} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{9} \\
&= \frac{\sqrt{3}\sqrt{21}\left(9-\sqrt{21}\right)}{27} \\
&= \frac{27\sqrt{7}-21\sqrt{3}}{27} \\
&= \sqrt{7}-\frac{7\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}
$$

参考図



222

(1)

解法 1

$1+\tan^2 C=\dfrac{1}{\cos^2 C}$ より， $\dfrac{1}{\cos^2 C}=1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{25}{9}$ $\quad\therefore \cos^2 C=\dfrac{9}{25}$ ・・・①

①および $\cos^2 C+\sin^2 C=1$ より， $\sin^2 C=1-\cos^2 C=\dfrac{16}{25}$ ・・・②

また， $\tan C>0$ より， C は鋭角である。したがって， $\sin C>0,\ \cos C>0$ ・・・③

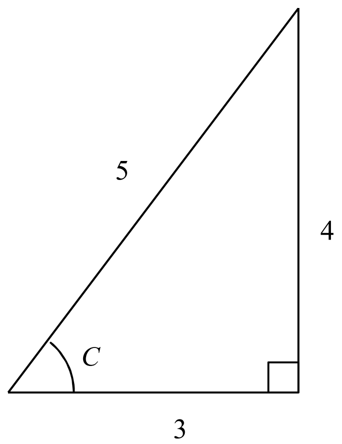
①～③より， $\sin C=\dfrac{4}{5}$， $\cos C=\dfrac{3}{5}$

解法 2

$\tan C=\dfrac{4}{3}>0$ より， C は鋭角である。

よって，底辺の長さ 3，高さ 4，斜辺の長さ 5 の直角三角形の三角比より，

$\sin C=\dfrac{4}{5}$， $\cos C=\dfrac{3}{5}$



(2)

余弦定理より， $\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\cos^2 C$

すなわち $n^2=(n+1)^2+(n+2)^2-2(n+1)(n+2)\cdot\dfrac{3}{5}$

これを整理すると $\dfrac{(n+1)(n-13)}{5}=0$

これと $n=\mathrm{AB}>0$ より， $n=13$

(3)

$\Delta\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}\sin C=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}(n+1)(n+2)$ ・・・④

また，内接円の半径を r とすると，

$\Delta\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\dfrac{1}{2}r\{n+(n+1)+(n+2)\}=\dfrac{3}{2}r(n+1)$ ・・・⑤

④，⑤より，$\dfrac{3}{2}r(n+1)=\dfrac{2}{5}(n+1)(n+2)$

よって，$r=\dfrac{4}{15}(n+2)$

これと，$n=13$ より，$r=4$

223

(1)

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$

これらを $(b-c)\sin^2 A=b\sin^2 B-c\sin^2 C$ に代入し，整理すると，$\dfrac{(b-c)a^2}{4R^2}=\dfrac{b^3-c^3}{4R^2}$

この両辺に $4R^2$ を掛けることにより，$(b-c)a^2=b^3-c^3$

(2)

$(b-c)a^2=b^3-c^3$ より，$(b-c)a^2=(b-c)(b^2+c^2+bc)$　$\therefore (b-c)\{a^2-(b^2+c^2+bc)\}=0$

よって，$b=c$ または $a^2=b^2+c^2+bc$

(i) $b=c$ のとき

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形

(ii) $a^2=b^2+c^2+bc$

$$
\begin{aligned}
a^2&=b^2+c^2+bc\\
&=b^2+c^2-2bc\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\
&=b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ
\end{aligned}
$$

よって，余弦定理より，△ABC は∠A が 120° の三角形

以上より，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形または∠A が 120° の三角形

224

(1)

$3a^2-4a-8b-4c-3=0$　・・・①　$a^2+2a+4b-8c+9=0$　・・・②　とすると，

①×2－②より，$5\left(a^2-2a-4b-3\right)=0$　$\therefore b=\dfrac{a^2-2a-3}{4}$

①＋②×2 より，$5\left(a^2-4c+3\right)=0$　$\therefore c=\dfrac{a^2+3}{4}$

(2)

$b=\dfrac{a^2-2a-3}{4}=\dfrac{(a+1)(a-3)}{4}>0$ かつ $a>0$ より，$a>3$　・・・③

$c-b=\dfrac{a^2+3}{4}-\dfrac{a^2-2a-3}{4}=\dfrac{a+3}{2}$，　$c-a=\dfrac{a^2+3}{4}-a=\dfrac{a^2-4a+3}{4}=\dfrac{(a-1)(a-3)}{4}$

これと③より，$c-b>0,\ c-a>0$

よって，c すなわち辺 AB の長さが最大である。

ゆえに，△ABC の内角のうち最大のものは∠C である。

(3)

∠C の大きさを θ とすると，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+\left(\dfrac{a^2-2a-3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{a^2+3}{4}\right)^2}{2a\cdot\dfrac{a^2-2a-3}{4}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

よって，$\theta=120°$

225

(1)

三角形の成立条件より，$|3-1|<a<3+1$　すなわち $2<a<4$

よって，$3\leq a<4$ または $2<a\leq 3$

$3\leq a<4$ のとき

$3^2\leq a^2<1^2+3^2=10$ より，$3\leq a<\sqrt{10}$　・・・①

$2<a\leq 3$ のとき

$a^2<3^2<a^2+1^2$ より，$2\sqrt{2}<a\leq 3$　・・・②

①または②より，$2\sqrt{2}<a<\sqrt{10}$

(2)

長さが a の辺の対角の大きさを α とすると，

正弦定理より，$\sin\alpha=\dfrac{a}{2\cdot\dfrac{9}{\sqrt{35}}}=\dfrac{\sqrt{35}a}{18}$

余弦定理より，$\cos\alpha=\dfrac{1^2+3^2-a^2}{2\cdot 1\cdot 3}=\dfrac{10-a^2}{6}$

よって，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より，$\left(\dfrac{\sqrt{35}a}{18}\right)^2+\left(\dfrac{10-a^2}{6}\right)^2=1$

両辺に 18^2 を掛けると，$35a^2+9\left(10-a^2\right)^2=18^2$

よって，$9a^4-145a^2+900-18^2=0$

これと，$900-18^2=(30+18)(30-18)=48\cdot 12=12^2\cdot 2^2=24^2$ より，$9a^4-145a^2+24^2=0$

よって，

$$\begin{aligned}9a^4-145a^2+24^2&=\left(3a^2\right)^2+24^2-145a^2\\&=\left\{\left(3a^2-24\right)^2+144a^2\right\}-145a^2\\&=\left(3a^2-24\right)^2-a^2\\&=\left(3a^2-24+a\right)\left(3a^2-24-a\right)\\&=(3a-8)(a+3)(3a+8)(a-3)\end{aligned}$$

より，$(3a+8)(3a-8)(a+3)(a-3)=0$

これより，$a=\pm\dfrac{8}{3},\ \pm 3$ となるが，(1)より，a のとりうる値の範囲は $2\sqrt{2}<a<\sqrt{10}$ である。

よって，$a=3$

226

$\sin\theta+\cos\theta=u$，　$\sin\theta\cos\theta=v$ とおくと，

$\sin\theta,\ \cos\theta$ を解とする t の 2 次方程式は　$t^2-ut+v=0$　・・・①

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{13}{27}$$

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

より，$u(1-v)=\dfrac{13}{27}$　・・・②

$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$ より，$u^2-2v=1$　$\therefore\ v=\dfrac{u^2-1}{2}$　・・・③

また，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ $(135^\circ<\theta+45^\circ<225^\circ)$ より，

$-1<\sin\theta+\cos\theta<1$　すなわち　$-1<u<1$ ・・・④

③を②に代入すると，$u\left(1-\dfrac{u^2-1}{2}\right)=\dfrac{13}{27}$ より，$\dfrac{-u^3+3u}{2}=\dfrac{13}{27}$

両辺に 54 を掛け整理すると，$27u^3-27\cdot 3u+26=0$

すなわち $(3u)^3-27\cdot 3u+26=0$

ここで，$3u=U$ とおくと，$U^3-27U+26=0$ より，$(U-1)(U^2+U-26)=0$

よって，$U=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{105}}{2}$　すなわち $u=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{105}}{6}$ となるが，

$\dfrac{-1\pm\sqrt{105}}{6}$ は④を満たさない。ゆえに，$u=\dfrac{1}{3}$　・・・⑤

これを③に代入することにより，$v=-\dfrac{4}{9}$　・・・⑥

⑤と⑥を①に代入し，両辺に 9 を掛けると，$9t^2-3t-4=0$

よって，解の公式により，$t=\dfrac{3\pm\sqrt{153}}{18}=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{6}$

これと，$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$-1<\cos\theta<0<\sin\theta<1$ であることから，

$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$，　$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{17}}{6}$

227

(1)

$AB=m,\ CA=n$ とすると，三平方の定理より，$m^2=n^2+p^2$

よって，$(m+n)(m-n)=p^2$

これと $m>n$ より，$\begin{cases} m+n=p^2 \\ m-n=1 \end{cases}$

この連立方程式を解くことにより，$(m,\ n)=\left(\dfrac{p^2+1}{2},\ \dfrac{p^2-1}{2}\right)$

よって，$AB=\dfrac{p^2+1}{2}$，$CA=\dfrac{p^2-1}{2}$

(2)

$\tan\angle A$ について

$(p^2-1)-2p=(p-1)^2-2\geq(3-1)^2-2=2>0$ より，$p^2-1>2p$

これと，$\tan\angle A=\dfrac{BC}{CA}=\dfrac{2p}{p^2-1}$ より，$0<\tan\angle A<1$

よって，$\tan\angle A$ は整数にならない。

$\tan\angle B$ について

$\tan\angle B=\dfrac{CA}{BC}=\dfrac{p^2-1}{2p}>0$ より，$\dfrac{p^2-1}{2p}=k$ （k は自然数）とすると，

$p^2-1=2kp$ より，$p(p-2k)=1$

ところが，$p-2k$ は整数，p は 3 以上の整数のため，等式は成り立たない。

よって，$\tan\angle B$ は整数にならない。

あるいは，

$\dfrac{p^2-1}{2p}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)=k$ （k は整数）とすると，$1-\dfrac{1}{p}=2k$ より，$1-2k=\dfrac{1}{p}$

よって，左辺は整数である。

ところが，右辺は，p が 3 以上の整数であることから $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{p}<1$ となり，整数ではない。

よって，等式が成り立たない。

ゆえに，$\tan\angle B$ は整数にならない。

228

$\angle$C の大きさを C とすると，$0° < C < 180°$

$\triangle$BCD について

余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 - 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos C$$
$$= 13^2 + 13^2 - 2\cdot 13\cdot 13\cos C$$
$$= 2\cdot 13^2(1-\cos C) \quad ・・・①$$

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin C} = 2\cdot\dfrac{65}{8}$

$$\therefore \mathrm{BD}^2 = \left(\frac{65}{4}\right)^2 \sin^2 C$$
$$= \frac{65^2}{4^2}(1-\cos^2 C)$$
$$= \frac{65^2}{4^2}(1-\cos C)(1+\cos C) \quad ・・・②$$

①，②より，$\dfrac{65^2}{4^2}(1-\cos C)(1+\cos C) = 2\cdot 13^2(1-\cos C)$

$0° < C < 180°$ より，$\cos C \neq 1$ だから，$\dfrac{65^2}{4^2}(1+\cos C) = 2\cdot 13^2$

よって，$\cos C = \dfrac{2\cdot 13^2\cdot 4^2}{65^2} - 1 = \dfrac{7}{25}$　・・・③

①と③より，

$$\mathrm{BD}^2 = 2\cdot 13^2(1-\cos C)$$
$$= 2\cdot 13^2\left(1-\frac{7}{25}\right)$$
$$= \frac{2\cdot 13^2\cdot 18}{25} \quad ・・・④$$

$\triangle$ABD について

$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CD}+\mathrm{DA} = 44$ および $\mathrm{BC}+\mathrm{CD} = 13+13 = 26$ より，$\mathrm{AB}+\mathrm{DA} = 18$

したがって，$\mathrm{AB} = x$ とすると，$\mathrm{DA} = 18 - x$　・・・⑤

また，円に内接する四角形の性質より，$\angle\mathrm{A} = 180° - \angle\mathrm{C} = 180° - C$

よって，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{DA}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DA}\cos(180° - C)$$
$$= x^2 + (18-x)^2 + 2x(18-x)\cos C$$
$$= 2x^2 - 36x + 18^2 - (2x^2 - 36x)\cos C$$

これと，③，④より，

$$2x^2-36x+18^2-\left(2x^2-36x\right)\cdot\frac{7}{25}=\frac{2\cdot18\cdot13^2}{25}$$

両辺に 25 を掛け，整理すると，

$36x^2-36\cdot18x+25\cdot18^2-2\cdot18\cdot13^2=0$ から，$36x^2-36\cdot18x+2\cdot18\left(25\cdot9-13^2\right)=0$

両辺を 36 で割り，整理すると，$x^2-18x+56=0$

よって，$(x-4)(x-14)=0$ より，$x=4,\ 14$

ゆえに，⑤より，$(\mathrm{AB},\ \mathrm{DA})=(4,\ 14),\ (14,\ 4)$